

表計算ソフトを利用したCFD教育の試み

A Trial of CFD Education with Spreadsheet Software.

増淵 寿

Hisashi Masubuchi

1. 背景

1.1 流体力学におけるCFDの進展 流体力学は、数学に基礎をおいて流体の運動を解析的に追求する「理論的研究」、観察や測定に基づいて流体挙動のモデル化や、実験式の導出を行う「実験的研究」を二本の柱として発展し、それぞれ古典流体力学、水力学としてまとめられてきた。一方、1970年代以降、流れを支配する方程式をコンピュータによって数値的に解く手法の研究が進められ、数値流体力学（CFD：Computational fluid dynamics）と呼ばれる第三の柱が形成されてきた。特に、近年のコンピュータの急激な発達と流体解析の汎用ソフトの登場は、CFDによって流れ場を求める数値シミュレーションを流体力学分野における問題解決の強力な手段へと発展させ、現在では設計の現場でも盛んに活用されるツールの1つになっている。

1.2 高等教育機関におけるCFD教育 このような背景から、CFDは学術研究のみならず工学教育的にも重要になっており、最近では大学の機械・航空系の多くの学科でCFDの講義が開講されているという⁽¹⁾。

しかし、教育の現場でCFDの何をどこまで教えるかについては大変に難しい課題である。例えば、学生にプログラムを作らせる場合、流体力学、数値計算法に加えてプログラミングの知識も必要となり、これら全てを学習した者でも、ソースコードを1から書き始めたのでは、簡単な解析を行うだけで膨大な時間が必要となることが多い。一方、汎用ソフトなどを利用して解析だけを実施させるのでは、肝心の解法（ソルバー）がブラックボックス化してしまい、真の意味でのCFD教育にはならない。このような事情により、CFD教育に苦心している学校が多いようである⁽¹⁾。

一方、本校では流体力学に直接関係する講義は表1の3つが開講されているが、これらは「理論」と「実験」とから導かれた内容が中心で、「CFD」にはほとんど触れていない。本科の講義では、CFDを学ぶために必須となる流体運動の基礎方程式まで扱っていないことが、その最大の原因であった。また、数値計算法を広く学習する数値計算（4年）や計算力学（専攻科1年）という講義があるため、あえて流れだけに限定したCFDの授業を開講するニーズも少なかった。しかし、実社会や大学教育におけるCFDの拡大を鑑みると、高専でも専攻科生にはCFDを経験させる必要があると判断した。そこで、オムニバス形式で実施している電子システム工学演習A（専攻科1年）の3回、合計6時間の講義で、機械系の専攻科生を対象にCFD教育を始めることにした。

Table1 ONCT's lecture courses on fluid engineering

科目名	開講学年	単位数
水力学	4M 通年	2 (履修単位)
流体機械	5M 通年	2 (履修単位)
流体力学	1SS 前期	2 (学修単位)

1.3 表計算流体力学 CFD教育では、学生にソルバーを自作させることが望ましいが、そのためにはプログラミングの知識が必要で、機械系の学生にはこれが大きな障害となる。コンピュータのプログラミングで時間を費やすことはCFDの本来の目的ではないため、これを回避する方法が検討されてきた。その解決策の1つとして、森下ら⁽²⁾は進歩の著しい表計算ソフトMicrosoft社のExcelを利用してCFDを実行する「表計算流体力学（SFD：Spreadsheet Fluid Dynamics）」を提案している。SFDはCFDで計算の中核をなす逆行列計算や繰り返し計算を、表計算ソフトに常備されている強力な計算機能を利用して実行するものである。このため、表計算に慣れていれば、プログラミングの知識があまりなくても、ソルバーを自作して簡単なシミュレーションを実行することができる。機械系の学生の多くは、プログラミングの経験は乏しいが、情報処理の授業などを通して表計算ソフトの扱いには習熟しているため、講義ではSFDによって流体解析を体験させることにした。

おもな記号

- U : 一様流の流速 (m/s)
- ρ : 流体の密度 (kg/m³)
- α : 翼の迎角 (°)
- c : 翼の翼弦長 (m)
- n_{Γ} : 翼の輪郭上に置かれる渦糸の個数
- Γ_i : i番目の渦糸の循環 (m²/s)
- L : 翼に生じる単位翼幅あたりの揚力 (N/m)
- c_L : 翼の揚力係数 $=L/(1/2 \rho U^2)$
- p : 流体の圧力 (Pa)
- p_0 : 翼から十分遠方における一様流の圧力 (Pa)

2. 離散渦法

2.1 離散渦法の特徴 CFDの代表的な計算法としては、流体の質量・運動量・エネルギーの保存を表わす基礎方程式を離散化し、これを有限差分法（FDM）で解く方法が挙げられる。FDMの一般論は他の講義（計算力学など）で取り上げられており、内容が重複するのは面白くない。

CFDに使われる計算手法はFDM以外にも数多く存在するが、その1つが、噴出しや渦といった特異点を流れの中に配置し、それらの特異点の強さと位置とを適当に調節して、任意形状の物体まわりのポテンシャル流れを求める特異点解法である。境界要素法（BEM）の一種に分類されるこの計算手法のうち、特異点として渦を離散的に配置する方法を離散渦法と呼び、次のような特徴がある。

(1) 流れ場に格子形成を必要としない。このため、他の手法に比べて簡単で小規模の計算で済み、SFD向きである。

(2) アルゴリズムが簡単明瞭であり、流れ現象の物理的性質が容易に理解できる。特に、速度ポテンシャルの重ね合わせ

による流れの表現は、流体力学の講義で扱う内容と一致するため、相乗効果が期待できる。

上記の特徴から、離散渦法は汎用的なCFDの計算法ではないが、専攻科生が数回の授業で扱うには適当な手法であると判断し、この講義で採り上げることにした。

2.2 解析対象 流速 U の一樣流中で、静止した平板翼（翼弦長が c 、翼幅は無有限大）のまわりに生じる二次元流れを解析対象とする。流体は完全流体で、流れは渦無しのポテンシャル流れとする。座標系と翼の位置は図1の通りで、迎角を α とする。

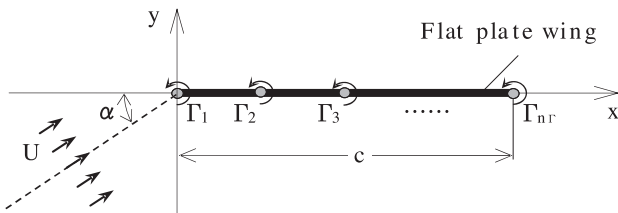


Fig.1 Schematic flow field and coordinate system

2.3 計算の手順 渦法による解析手順を簡単に説明する。まず、翼の背面と腹面における流速の差を表現するため、ポテンシャル流れの基本解である渦糸を n_Γ 個だけ翼の輪郭上に等間隔に配置する。このとき、位置 (x_i, y_i) に置かれた循環 Γ_i の渦糸が、任意の点 (x, y) に誘起する流速 (u_i, v_i) は式(1)で表わされる。

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \frac{-\Gamma_i (y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (1)$$

$$v_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

ここで、速度ポテンシャルは重ね合わせが可能であるから、流れ場中の任意の点 (x, y) における流速 (u, v) は、一樣流と n_Γ 個の渦糸による誘起速度の総和として式(2)で求められる。

$$u = U \cos \alpha + \sum_{i=1}^{n_\Gamma} u_i, \quad v = U \sin \alpha + \sum_{i=1}^{n_\Gamma} v_i \quad (2)$$

次に、流れ場中に翼が存在することを表わすため、流れが翼面を貫かないようにする。すなわち、翼の輪郭上に設けた評価点 (x_j, y_j) での流速 $\vec{u}_j = (u_j, v_j)$ が、翼面に沿う方向となるように、各渦の循環 Γ_i を定める。具体的には、評価点における翼面に対する単位法線ベクトルを $\vec{n}_j$ とすれば、式(3)が全ての評価点で満足されれば良い。

$$\vec{u}_j \cdot \vec{n}_j = 0 \quad (3)$$

(ただし、 u_j, v_j は式(2)の u, v に $x=x_j, y=y_j$ を代入したもの)。

今回は、隣接する渦糸の中心を評価点と定めたため、その数は渦糸の数よりも常に一つ少ない。したがって、式(3)で得られるのは、 Γ_i に関する $n_\Gamma - 1$ 個の連立方程式であり、全ての渦糸における循環を求めるにはもう一つの式が必要になる。そこで、式(4)のKuttaの条件（後縁で翼の背・腹面からの流れがスムーズに合流する）を課す。

$$\Gamma_i = 0 \quad (\text{ただし、後縁} i = n_\Gamma \text{において}) \quad (4)$$

式(3)と(4)からなる連立方程式を解いて Γ_i を求めれば、翼まわりの流れが分かったことになる。例えば、翼に生じる（単位翼幅あたりの）揚力は、クッタ・ジューコフスキーの定理より式(5)で求められる。

$$L = -\rho U \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \Gamma_i \quad (5)$$

離散渦法による平板翼まわりの流れの数値計算

1. 計算条件設定

一樣流	流速	U	1.0	m/s
	迎角	α	15.0	°
流体物性	密度	ρ	1.205	kg/m ³
平板翼	翼弦長	c	1.0	m

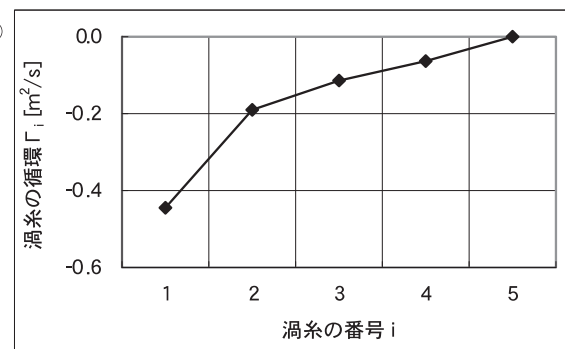
渦糸の座標	1	2	3	4	5
x_i	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000
y_i	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

評価点の座標	x_j	y_j
1	0.125	0.000
2	0.375	0.000
3	0.625	0.000
4	0.875	0.000

2. 主計算

行列 A				
1.273	-1.273	-0.424	-0.255	-0.182
0.424	1.273	-1.273	-0.424	-0.255
0.255	0.424	1.273	-1.273	-0.424
0.182	0.255	0.424	1.273	-1.273
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

逆行列 A ⁻¹				
0.537	0.322	0.322	0.537	1.000
-0.230	0.414	0.230	0.322	0.571
-0.046	-0.249	0.414	0.322	0.514
-0.015	-0.046	-0.230	0.537	0.571
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000



行列 b	循環 $\Gamma = A^{-1}b$
-0.259	$\Gamma_1 = -0.445$ [m ² /s]
-0.259	$\Gamma_2 = -0.191$ [m ² /s]
-0.259	$\Gamma_3 = -0.114$ [m ² /s]
-0.259	$\Gamma_4 = -0.064$ [m ² /s]
0.000	$\Gamma_5 = 0.000$ [m ² /s]

循環総和 $\sum \Gamma_i = -0.813$ [m²/s]

単位幅あたりの揚力 $L = 0.980$ [N/m]

渦法による揚力係数 $c_L = 1.626$ [-]
解析解による揚力係数 $c_{Lt} = 1.626$ [-]

Fig.2 Sample of a spreadsheet program for vortex method (Solver)

2・4 表計算ソフトによる循環の計算 前節より、離散渦法では Γ_i に関する連立方程式の解法がソルバーの中心であると分かる。渦糸の数が多い場合は、式(3),(4)からなる連立方程式を行列の形に書き直し、式(6)のようにして解く。

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{b}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{ただし, } {}^t\boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n\Gamma}]) \quad (6)$$

一般的なCFDでは、これを解くためにガウスの消去法などのプログラムを作成するが、SFDではこの計算を表計算ソフトで代用する。具体的には、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ の各行列要素を手計算で求め、表計算のシートへ入力すれば、 $\mathbf{A}^{-1}$ および $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ はそれぞれExcelの常備されている逆行列計算関数MINVERSE($\mathbf{A}$)、行列積の計算関数MMULT($\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{b}$)を利用して瞬時に計算できる⁽²⁾。実際に作成した表計算のシートの一例を図2に示す。

①で示すセルへ、一様流や翼の条件を代入すれば、Excelは瞬時に $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ の各行列要素および各渦糸の循環 Γ_i を計算して②のセルへ出力し、同時にグラフも描画する。最後に、揚力や揚力係数も自動的に計算して③のセルへ出力するように作ってある。

渦糸	個数	n_Γ	5				
	番号	i	1	2	3	4	5
	座標	x_i [m]	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		y_i [m]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	循環	Γ_i [m ² /s]	-0.445	-0.191	-0.114	-0.064	0.000
一様流	流速	U [m/s]	1.0				
	迎角	α [°]	15				
速度・圧力などを 計算する範囲			下限 min	上限 max	マクロを実施 (速度・圧力の計算)		
	x [m]		-1.0	2.0			
	y [m]		-1.0	1.0			
分割数	x方向	20					
	y方向	19	奇数)				
流体の密度	ρ [kg/m ³]	1.205					

のセルにデータを入力し、「マクロを実施」のボタンをクリックしてください。

Fig.3 Spreadsheet program for post-processing

流速 U [m/s]	1.0	迎角 α [°]	15		
座標		流速		圧力	流れ関数
x [m]	y [m]	u [m/s]	v [m/s]	$p-p_0$ [Pa]	ψ
1.5	1.5	1.017894	0.145583	1.276767	-0.037047
1.3	1.5	1.022313	0.146767	1.305987	-0.043098
.....					

Fig.4 Sample of an output data file to be used for post-processing

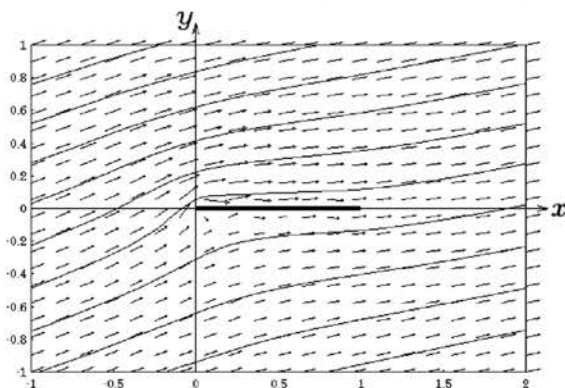


Fig.5 Velocity vectors and streamlines

2・5 後処理 CFDでは、ソルバーと同等に、前処理（プリプロセッシング）と後処理（ポストプロセッシング）とが重要となる⁽³⁾。このうち、前処理の主なものは計算格子の作成であるが、渦法ではその必要がないため、この講義では割愛する。一方、後処理の中心はコンピュータグラフィックス（CG）による計算結果の可視化である。機械系の学生はこの分野の経験が乏しいため、この講義で積極的に体験させることにした。

CFD計算結果のうちCGで表示する対象としては、ベクトル関数について(i)速度ベクトルと(ii)流線、スカラー関数として(iii)圧力の等値線および面塗り（圧力の大きさを色や濃淡で表わした図）などが挙げられる。このうち、(ii)と(iii)とはExcelのグラフ機能で一応描画が可能であるが、可視化CGの作成用としては機能的に物足りず、(i)を描画する機能はExcelには備えられていない。そこで、(i)～(iii)のCG作成は、フリーソフトのAV似非⁽⁴⁾で行うことにする。このソフトは、必要なグラフ描画機能を全て満たしているが、計算機能は備えていないため、描画に使用するデータを、あらかじめ

$$p-p_0 = \frac{1}{2} \rho \{ U^2 - (u^2 + v^2) \} \quad (7)$$

テキストファイル形式で用意しておかねばならない。今回、必要となるデータは、格子点の座標と流速、圧力などである。このうち、格子点の流速 (u, v) は式(2)で、圧力 p はベルヌーイの定理から式(7)によって算出する。

この計算はExcelの表計算だけでも実現できるが、格子点の数や間隔に自由度をもたせるため、マクロ（VBA：Visual Basic for Application）を利用する。その詳細は割愛するが、図3のシートで、ハッチングしたセルに必要なデータを入力し、ボタンをクリックするだけで、図4のCSV（Comma Separated Value）形式のデータファイルを自動で生成するようにしてある。

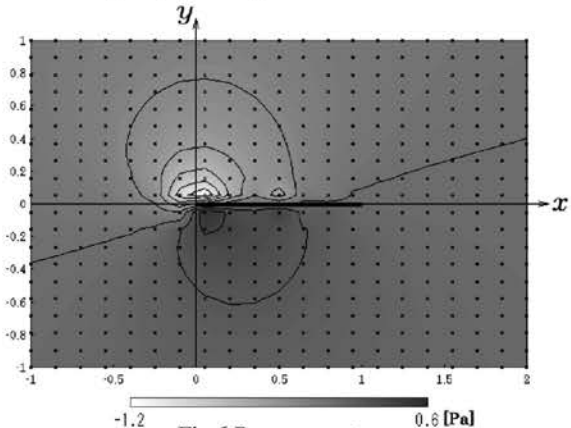


Fig.6 Pressure contour

このファイルをAV似非で読み込めば、図5の速度ベクトルと流線、図6の圧力の等値線と面塗りの図とを作成できる。

3. 講義の内容

前章で説明した離散渦法によるCFDを3回の講義で学習させるため、各回の講義内容を次の通りに設定した。一見すると1回あたりの内容が多すぎるように見えるが、この講義に先立ち、受講者全員が流体力学を履修してポテンシャル流れや翼理論については一通り理解しているため、ほぼ講義時間内で完結できている。

3・1 第1回目の講義 始めにCFDの一般的な説明と流体力学の復習とを行う。次に、離散渦法の基本的な考え方を説明し、前縁と後縁とに設置した2個の渦糸 ($n_\Gamma=2$) で翼を表現する。速度ポテンシャルは使用せず、渦糸が周囲に誘起する速度を重ね合わせ、評価点で要求される式(3)の流速条件から循環を求める。全て手計算とする。

3・2 第2回目の講義 翼の前縁・後縁と中間とにそれぞれ1個ずつ、計3個の渦糸 ($n_\Gamma=3$) で翼を表現する。速度ポテンシャルを使用して循環を求める連立方程式を導出させる。次に、連立方程式(6)を、表計算ソフトで解く方法を解説し実習させる。最後に、5個の渦糸 ($n_\Gamma=5$) で翼を表現する場合の連立方程式の導出と、これを解く計算シートの作成を宿題として課す。学生はExcelの扱いには慣れており、ソフトの説明をほとんどしなくても各自が白紙のシートから図2のような計算シートを作成してくる。

3・3 第3回目の講義 前回の宿題の結果を利用し、後処理を行う。マクロを含む図3のシートを学生にコピーして渡し、図4の描画用のデータを作らせてAV似非による可視化CGの作成を体験させる。最後に、CFD実行時の注意点について概説し、レポート課題を課して終了する。

4. レポート課題

講義終了後に受講生に提出を求めるレポートの内容については毎年少しずつ改善につとめているが、現在は次の基本および応用問題を課している。

4・1 基本問題 (1)迎角と揚力係数との関係調査 … 流体実験で、迎角を少しずつ変化させて揚力を測定すると同様、自作した図2のシートで迎角を5° ずつ変化させて計算を繰り返し行い、揚力係数を求めて図7のグラフを作成する。CFDが数値実験であることを実感させ、現実との違い（失速の有無）についても考察させる。

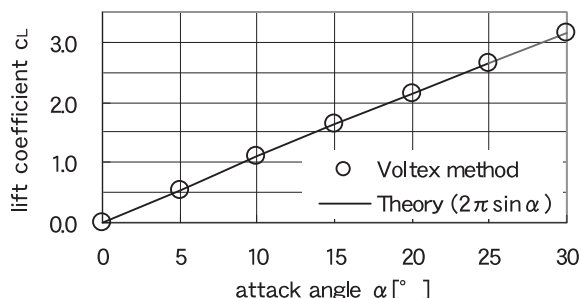


Fig.7 Relation between attack angle and lift coefficient

(2) 後処理の実施 … 図5,6のグラフを作成させる。作成自体よりも、どんなCGにすれば流れの様子が理解しやすくなるかを考えさせることを目的とする。さらに、出力したCGを

使い、流れや圧力分布について文章で説明させる。

4・2 応用問題 (1) 翼型の変更 … 翼が平らではなく反りがある場合について計算させる。計算手法は平板と同じだが、連立方程式(6)がやや複雑になるため、図8の渦糸が3個 ($n_\Gamma=3$) の場合に限定する。

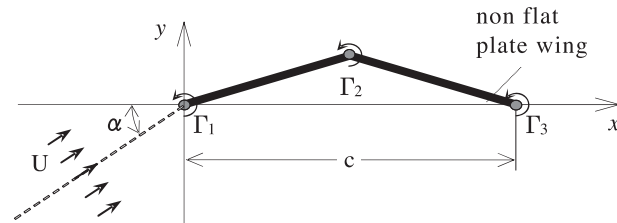


Fig.8 Schematic flow field and coordinate system

(2) 境界条件の変更 … 翼が一樣流中に置かれてから十分に時間が経過した後の状態を表す式(4)のクッタの条件に変わり、翼が流れの中に置かれた直後の状態を表す式(8)のケルビンの循環不変定理を用いて計算させる。

$$\sum_{i=1}^{n_\Gamma} \Gamma_i = 0 \quad (8)$$

解析は計算シートのわずかな変更で実行できる。2つの境界条件式がそれぞれ表す物理的な意味について考え、翼理論の理解を深めてもらうことを目的としている。

5. まとめと今後の課題

比較的容易な翼まわりの流れを対象として、学生全員にソルバーとなる計算シートを白紙の状態から作成させ、計算結果の後処理（可視化CGの作成）まで、CFDの手順を一通り体験させることを目標に講義を行った。

受講生が提出したレポートの感想の欄には、「一から自分の手で解析したので、全体の流れを理解できた」「理論式から問題を解く作業は数多く経験しているが、結果を理解しやすいCG化する作業は初体験で面白かった」等の意見があり、目的の一端は達成された感じを受ける。また、「シミュレーションを行うことで流体力学の理解が少し深まった」との記述も複数あり、期待した相乗効果もあるように思える。

この講義の今後の課題としては、①パラメータの無次元化、②粘性効果の導入と抗力計算、③後処理用ソフトの再検討（AV似非は2002年で更新が終了）などが挙げられる。CFDはいまだ発展途上の学問であり、時代に合わせて講義内容も順次更新していかなければならない。

6. 参考文献

- (1) 藤井孝蔵, 流れ, 日本流体力学会, 21 (2002), 46
- (2) 森下悦生, Excelで学ぶ流体力学, 丸善, (2000), 19
- (3) 中橋和博・藤井孝蔵, 格子形成法とコンピュータグラフィックス, 東京大学出版会, (1995)
- (4) <http://hp.vector.co.jp/authors/VA011972/>

小山工業高等専門学校 機械工学科

E-mail: masubuti@oyama-ct.ac.jp

「受理年月日 2008年9月26日」